Элементы сферической тригонометрии

1) Геометрия на сфере
2) Сферический треугольник
3) Основные формулы решения сферических треугольников
4) Правила решения прямоугольных сферических треугольников

1) Геометрия на сфере

I Большой круг

Пусть дана точка **O** (x_0,y_0,z_0).

О. - Сфера – это геометрическое место точек равноудалённых от точки **O** называемой её центром.

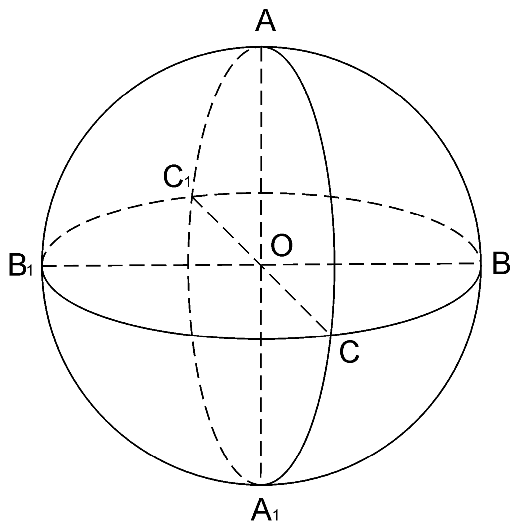


Рис. 1

Если пересечь сферу плоскостью проходящей через **O**, то в сечении получим большой круг с радиусом равным радиусу шара. Через любые две точки шара **A** и **B** можно провести пучок плоскостей, при этом в сечении любой из этих плоскостей всегда получим круг. Если **A** и **B** не концы диаметра, то большой круг будет в сечении только одной из плоскостей, остальные – малые; и тогда длина меньшей дуги большого круга является кратчайшим расстоянием между **A** и **B** на поверхности сферы (шара) и называется геодезической линией.

З. – В сферической геодезии рассматриваются только фигуры образованные дугами больших кругов.

II Измерение дуг и углов на сфере

Измерения дуг мы будем производить по дугам больших кругов.

$$\breve{A}\breve{B} = R\alpha \qquad (1)$$

R – радиус сферы (шара)
α – соответствующий центральный угол

З. – По предложению Леонарда Эйлера в сферической тригонометрии рассматриваются только дуги с длиной $l \le \pi R$ (при $R = 1$: $l \le \pi$).

Если $R = 1$, то для единичной сферы любую дугу большого круга можно охарактеризовать соответствующим центральным углом.

Угол, под которым пересекаются дуги двух больших кругов, измеряется линейным углом между касательными к большим кругам в точке пересечения или двугранным углом между плоскостями больших кругов.

III Сферический двуугольник

При пересечении двух больших кругов на поверхности сферы, образуются четыре сферических двуугольника, длины сторон которых равны π, а площади:

$$S = 2R^2\alpha \qquad (2)$$

2) Сферический треугольник

I Основные определения

О. – Сферическим треугольником называется часть сферы ограниченная тремя взаимно пересекающимися дугами больших кругов.

Вершины сферического треугольника можно определить как точки пересечения сферы и трёх лучей из центра сферы или как точки пересечения дуг больших кругов; стороны – как углы между лучами, при этом каждой соответствует дуга большого круга на сфере.

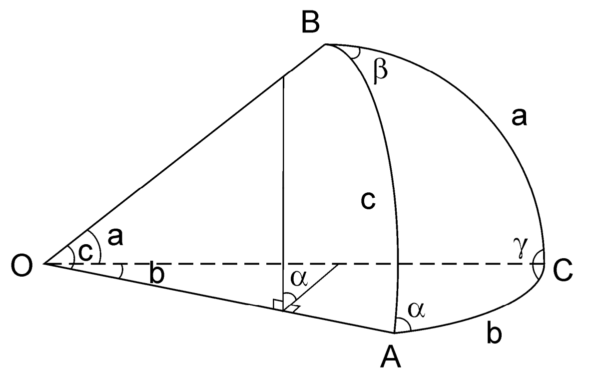


Рис. 2

О. – Сферические треугольники, у которых стороны и соответствующие углы меньше π, называются треугольниками Эйлера (r = 1).

II Свойства сферических треугольников

Для треугольников Эйлера со сторонами **a**, **b**, **c** и углами **α**, **β**, **γ**справедливы свойства:

- Сумма двух сторон больше третьей, разность – меньше ($a + b > c$; $|a - b| < c$)

- Сумма двух углов меньше третьего увеличенного на π ($\alpha + \beta < \gamma + \pi$)

- Большая сторона противолежит большему углу ($a > b$ если $\alpha > \beta$; $a = b$ если $\alpha = \beta$)

- Сумма углов заключена в пределах от π до 3π ($\pi < \alpha + \beta + \gamma < 3\pi$), сумма сторон – от 0 до 2π ($0 < a + b + c < 2\pi$)

З. – Сумма углов в сферическом треугольнике всегда больше 180 градусов. Разность $\alpha + \beta + \gamma - \pi = \varepsilon$ называется сферическим избытком (эксцессом).

$$\alpha + \beta + \gamma - \pi = \varepsilon \qquad (8)$$

- Треугольники Эйлера обладают свойством однородности, т. е. если сумма двух сторон больше, меньше или равна 180 градусам, то и сумма противоположных углов также больше, меньше или равна 180 градусам.

З. – Свойства 1 – 4 являются условиями существования сферических треугольников

Площадь сферического треугольника: $S_\Delta = R^2 \varepsilon$ (9)

Сферический дефект: $2\pi - (a + b + c) = d$ (10)

Условия равенства сферических треугольников:
- по трём сторонам
- по трём углам
- по двум сторонам и углу
- по стороне и двум углам

З. – Два сферических треугольника расположенных на одной сфере равны, если они имеют одинаково расположенные равные элементы.

З. – Если даны две стороны и противолежащий угол или два угла и противолежащая сторона, то сферический треугольник определяется неоднозначно. Неоднозначность решения сферических треугольников в этом случае, вытекает из равенства $\sin x = \sin(180 - x)$.

3) Основные формулы решения сферических треугольников
I Теорема синусов

$$\frac{\sin a}{\sin \alpha} = \frac{\sin b}{\sin \beta} = \frac{\sin c}{\sin \gamma} \qquad (11)$$

Синусы сторон сферического треугольника пропорциональны синусам противолежащих углов.

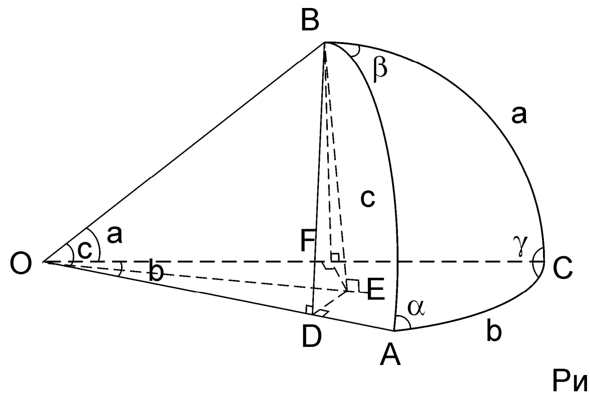


Рис. 3

$x \le 90°$; $OB = OC = OA = R = 1$; $BD \perp OA$; $BF \perp OC$; $\angle BDE = \alpha$; $\angle BFE = \gamma$

В $\Delta BDE: \dfrac{BE}{BD} = \sin\alpha \Rightarrow BE = BD\sin\alpha$

В $\Delta BFE: \dfrac{BE}{BF} = \sin\gamma \Rightarrow BE = BF\sin\gamma$

В $\Delta BDO: \dfrac{BD}{OB} = \sin c \Rightarrow BD = OB\sin c$

В $\Delta BFO: \dfrac{BF}{OB} = \sin a \Rightarrow BF = OB\sin a$

$$BD\sin\alpha = BF\sin\gamma$$
$$OB\sin c\sin\alpha = OB\sin a\sin\gamma$$
$$\frac{\sin a}{\sin\alpha} = \frac{\sin c}{\sin\gamma}$$

аналогично $\dfrac{\sin a}{\sin\alpha} = \dfrac{\sin b}{\sin\beta}$

Если элементы сферического треугольника больше $90°$ т. е. $90° \le x \le 180°$,
то т. к. $\sin x = \sin(180° - x)$ и $0° \le (180° - x) \le 90°$,
и мы приходим к первой части доказательства.

II Теорема косинусов сторон

Косинус стороны сферического треугольника равен произведению косинусов двух других сложенному с произведением их же синусов на косинус угла между ними.

$$\cos a = \cos b\cos c + \sin b\sin c\cos\alpha \qquad (12)$$

З. –При написании формул сферических треугольников можно использовать правило круговой (циклической) перестановки.

III Теорема косинусов углов

Косинус угла сферического треугольника равен произведению косинусов других углов с обратным знаком, сложенному с произведением их же синусов на косинус стороны между ними.

$$\cos\alpha = -\cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\cos a \qquad (13)$$

IV Теорема о пяти элементах

Произведение синуса стороны на косинус прилежащего угла равно произведению косинуса противолежащей углу стороны на синус третьей стороны, вычесть произведение синуса противолежащей стороны на косинус третьей стороны и на косинус угла между ними.

$$\sin a\cos\beta = \cos b\sin c - \sin b\cos c\cos\alpha$$
$$\sin a\cos\gamma = \cos c\sin b - \sin c\cos b\cos\alpha$$

V Теорема котангенсов (четырёх элементов)

Произведение котангенса крайней стороны на синус внутренней равно произведению косинусов внутренних элементов сложенному с произведением синуса внутреннего угла на котангенс крайнего.

$$ctga\sin b = \cos b\cos\gamma + \sin\gamma ctg\alpha$$
$$ctgc\sin b = \cos b\cos\alpha + \sin\alpha ctg\gamma$$

З. - Эти формулы основные. Есть ещё формулы половинного угла и т. д. (всего около 50 - 60). (Бронштейн “Справочник для инженеров и учащихся ВТУЗов”).

VI Особенности решения узких сферических треугольников

При решении ряда задач, приходится решать узкие сферические треугольники, т. е. такие треугольники, одна из сторон которых значительно меньше двух других.

Пусть мала сторона а, тогда угол α также мал.
Известно, что для малых значений аргумента:

$$\sin x \approx x$$
$$\cos x \approx 1$$

Тогда:

$$\cos\alpha = 1$$
$$\sin\alpha = \alpha$$
$$\cos a = 1$$
$$\sin a = a$$
$$\sin(b-c) = b-c$$

Что позволяет значительно упростить формулы сферической тригонометрии:

$$\sin a\cos\beta = \cos b\sin c - \sin b\cos c\cos\alpha$$
$$a\cos\beta = \cos b\sin c - \sin b\cos c = \sin(c-b) = c-b$$

$a\cos\beta = c - b$

VII Особенности решения малых сферических треугольников

О. – Сферический треугольник называется малым, если стороны его малы по сравнению с радиусом сферы. Такие треугольники ещё называют треугольниками Лежандра.

Т. – Малый сферический треугольник может быть вычислен как плоский имеющий те же стороны и каждый угол на $1/3\,\varepsilon$ меньше соответствующего угла сферического треугольника.

Установлено, что решение в соответствии с теоремой Лежандра сферических треугольников на земной поверхности, со сторонами не более 200 километров приводит к ошибке в углах до 0".01 (расстояние между геодезическими пунктами обычно составляет до 30 – 40 километров, $R \approx 6370км$).

VIII Использование свойств полярного треугольника для решения прямосторонних сферических треугольников

О. – Прямосторонний сферический треугольник – треугольник, в котором хотя бы одна из сторон равна $90°$.

О. – Полярный сферический треугольник – треугольник стороны которого отстоят на 90° от вершин данного произвольного сферического треугольника, для которого построен этот полярный треугольник.

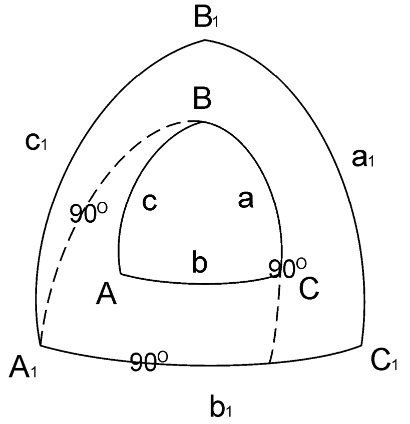


Рис. 4

Если вершины косоугольного сферического треугольника принять за полюсы, то A_1B_1, B_1C_1 и C_1A_1- поляры, которые пересекаясь образуют полярный сферический треугольник $A_1B_1C_1$. Но и треугольник ABC полярен по отношению к треугольнику $A_1B_1C_1$.

Основное свойство полярного сферического треугольника заключается в том, что сумма угла данного треугольника и соответствующей стороны полярного равна $180°$.

$$\angle A_1 + a = \angle B_1 + b = \angle C_1 + c = 180° \qquad (16)$$

Указанное свойство используют при решении прямосторонних треугольников. По известным элементам данного и формуле (16) находят элементы полярного прямостороннего треугольника, после чего решают полярный треугольник и по формуле (16) переходят обратно к данному.

4) Правила решения прямоугольных сферических треугольников

О. – Сферический треугольник, у которого хотя бы один угол равен $90°$, называется прямоугольным.

Сторона, противолежащая углу равному $90°$ - гипотенуза.

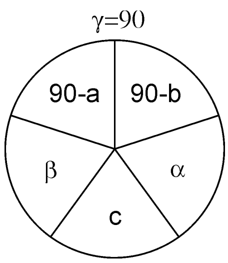
Т. – Теорема Пифагора для сферических треугольников:
Косинус гипотенузы равен произведению косинусов катетов.

$$\cos c = \cos a \cos b \tag{17}$$

Соотношения между элементами прямоугольного сферического треугольника можно найти по правилу Непера – Модюи: косинус каждого элемента равен произведению синусов двух неприлегающих к нему элементов и равен произведению котангенсов двух прилегающих.

З. – При использовании данного правила необходимо помнить, что вместо катетов нужно брать их дополнения до $90°$. Кроме того, прямой угол треугольника в данном случае не учитывается, то есть катеты считаются прилегающими друг к другу.

Чтобы воспользоваться этим правилом, можно построить вспомогательную диаграмму:



$$\cos c = \sin(90° - a)\sin(90° - b) = \cos a \cos b$$
$$\cos(90° - b) = \sin b = ctg(90° - a)ctg\alpha = tgactg\alpha \tag{18}$$